Note Title 4/13/2020

بنام خدا

پیدا کردن توزیع سرعت جریان سیال

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos\beta$$

$$B.C_1 \begin{cases} x = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{cases}$$

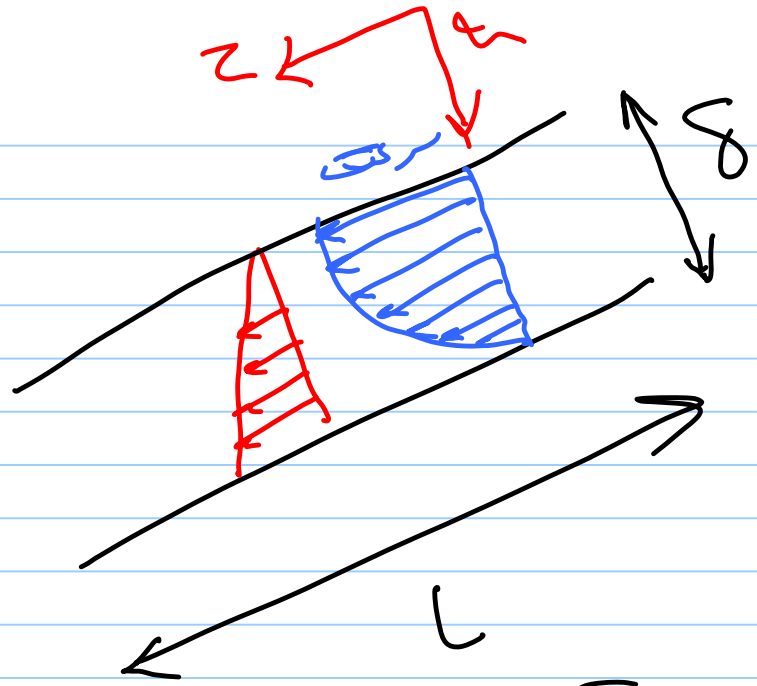
$$\tau_{xz} = \rho g \cos\beta\, x + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\boxed{\tau_{xz} = \rho g \cos\beta\, x}$$

$$\tau_{xz} = -\eta \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\rho g \cos\beta \, x = -\eta \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{\rho g \cos\beta}{\eta} x$$



$$V_z = -\frac{\rho g \cos\beta}{\eta} \frac{x^2}{2} + C_1$$

B.C $\begin{cases} x = \delta \\ V_z = 0 \end{cases}$

$$0 = -\frac{\rho g \cos\beta}{2\eta} \delta^2 + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\rho g \cos\beta}{2\eta} \delta^2}$$

$$v_z = -\frac{\rho g \cos\beta}{\eta} + \frac{a^2}{2} + \frac{\rho g \cos\beta}{2\eta}\delta^2$$

$$v_z = \frac{\rho g \cos\beta \delta^2}{2\eta}\left[1 - \left(\frac{a}{\delta}\right)^2\right]$$

$$v_{z\,max} = \frac{\rho g \cos\beta \delta^2}{2\eta}$$

$a = 0$

$$\bar{V}_z = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} V_z\, dx = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} \frac{\rho g \cos\beta\, \delta^2}{2\eta}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] dx$$

$\bar{V}_z$ میانگین سرعت سیال

$$= \frac{\rho g \cos\beta\, \delta}{2\eta}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^2 dx \Rightarrow \boxed{\bar{V}_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{3\eta}}$$

$$Q = \bar{V}_z\,(w\delta) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\rho g w \delta^3 \cos\beta}{3\eta}}$$

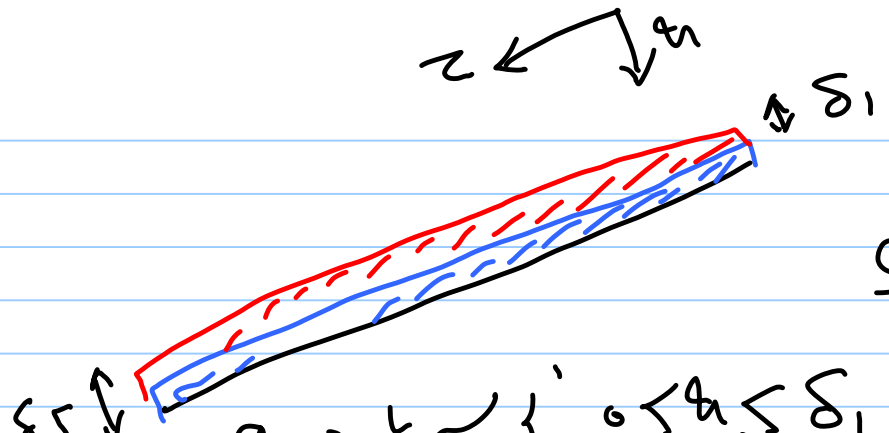
Q سرعت شارحجمی

عرض سطح شیب‌دار w

سرعت شارحجمی.

$$Q_m = \rho Q_v \qquad \rho = \frac{m}{v} \qquad m = \rho v$$

مثال ۱- یک سرباره سطح یک فلز را پوشانده است و هر دو با هم به آهستگی به پایین سطح شیب دار سیلان می‌کنند. زاویه سطح شیب دار β است. ضخامت سرباره و ضخامت فلز مایع y_2 است. هر دو لایه ویسکوزیته مشابه و چگالی را دارند. طول سطح شیب دار L است. فرض کنید سیال به صورت لایه‌ای جریان دارد. توزیع سرعت در هر لایه را به دست آورید



$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos\beta$$:ل

$$\begin{cases} 0 \le x \le \delta_1 \\ \delta_1 \le x \le \delta \end{cases}$$

$$BC. \begin{cases} x = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{cases}$$

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos\beta + C_0 \Rightarrow C_0 = 0$$

$$\boxed{\tau_{xz} = \rho g x \cos\beta} \quad (1)$$

$$\tau_{xz} = -\eta \frac{dv_z}{dx}$$

$$\frac{dv_z}{dx} = -\frac{x \rho g \cos\beta}{\eta} = -\frac{x g \cos\beta}{\nu}$$

سرعت سیال $\rightarrow$ لزجت سینماتیک

$$\frac{dv_z}{dn} = -\frac{n g \cos\beta}{\nu_g} \Rightarrow v_{zg} = -\frac{g\cos\beta\, n^2}{2\nu_g} + C_1$$

$$0 \le n \le \delta_1$$

B.C$_1$ $\begin{cases} n = \delta_1 \\ v_{zg} = v_{zm} \end{cases}$

برای $\delta_1 \le n \le \delta_2$ می‌شود:

$$\tau_{nz(m)} = \rho_m g \cos\beta\, n + C_2$$

$$\rho_m g \cos\beta\, n + C_2 = -\eta_m \frac{dv_z}{dn}$$

$$V_{z_{\text{فاز}}} = -\frac{4r^2 g \cos\beta}{12\eta_m} - \frac{C_1 u + C_0}{\eta_m}$$

ثابت انتگرال از شرط مرزی

$C_2 \Rightarrow$ BC1 $\begin{cases} u = \delta_1 \\ \tau_{rz(g)} = \tau_{rz(m)} \end{cases}$

BC2 $\begin{cases} u = \delta_2 \\ V_{z_{\text{فاز}}} = 0 \end{cases}$

$$\rho_g g \cos\beta\, \delta_1 = \rho_m g \cos\beta\, \delta_1 + C_2$$

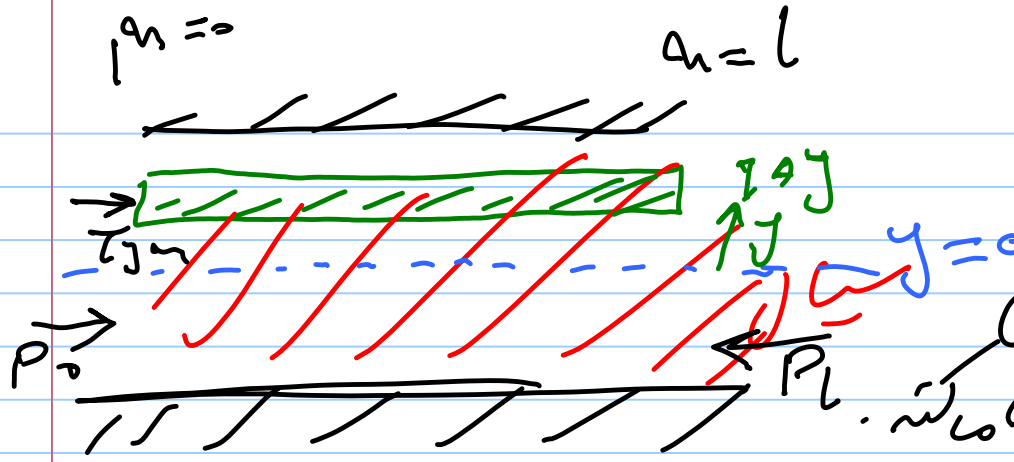
$$C_2 = g\cos\beta\, \delta_1 (\rho_g - \rho_m)$$

$$C_1 = \frac{\delta_2^2 g \cos\beta}{12\eta_m} + C_2 \delta_2$$

$B.C_1$ $\begin{cases} h = \delta_1 \\ v_{2g} = v_{2m} \end{cases} \Rightarrow C_1 \rightarrow$ به دست می‌آید

$$C_1 = \left[\frac{\delta_2^2 - \delta_1^2}{\nu_m} + \frac{\delta_1^2}{\nu_g} \right] \frac{g \cos\beta}{2} + C_2 (\delta_c - \delta_1)$$

مثال: در جریان جت خروجی کنترل و کنترل‌پذیری سریع $1\,N s m^{-2}$ و وسیله‌ی فلزی است $V\,g_{cm^3}$ و $12.3\,g_{cm^3}$ و $\nu = 10^{-3}\,m^2 s^{-1}$ زاویه‌ی سطح شیب‌دار $\beta = 45^\circ$ و $\delta_1 = 1\,mm$ و $\delta_c = 2\,mm$ جابجایی سرعت در فاصله‌ی سریع را محاسبه کنید. (توسط دانشجویان انجام شود)



جریان بین ۲ سطح موازی

اگر یک اغتشاش خارجی در ابتدا و انتهای سیال به وجود آید ← سیال حرکت می‌کند.

$$\left(\begin{array}{c}\text{سرعت مشتق}\\ \text{دوم}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{سرعت مشتق}\\ \text{اول}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{سرعت بی‌بعد}\\ \text{وارد شده}\end{array}\right) = 0$$

سرعت مشتق اول $\left\{ \tau_{yx}\big|_y \ (Lw) \right.$

سرعت هم‌متوع
ورق $\left\{ \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y} \right. (lw)$

سایر نیروها $\left\{ \begin{array}{l} \text{نیروی فشار وارده} \\ x=0 \text{ به جا} \end{array} \right. \Rightarrow P_0 (\Delta y w)$

$\begin{array}{l} \text{نیروی فشار وارده} \\ x=L \text{ به جا} \end{array} - P_L (\Delta y w)$

$$(lw)\,\tau_{yx}\big|_y - (lw)\,\tau_{yx}\big|_{y+\Delta y} + (P_0 - P_L)\,\Delta y\, w = 0$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\tau_{yx}\big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}\big|_{y}}{\Delta y} = \frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$\boxed{\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L}}$$