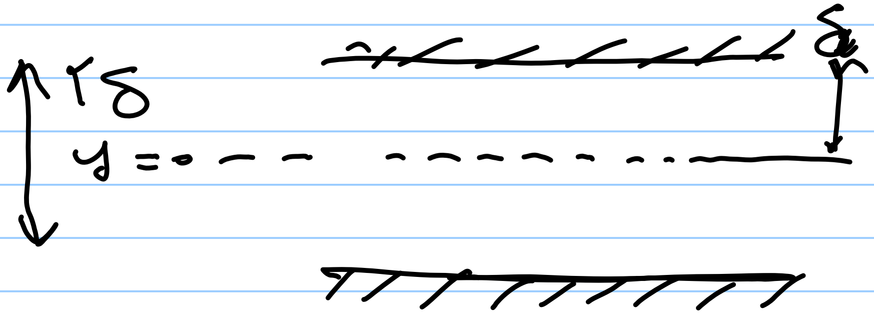
بنام خدا

جلسه ۵ ام مجازی درس پدیده‌های انتقال

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L} \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + C_1$$

$$B.C_1 \begin{cases} y = 0 \\ \tau_{yx} = 0 \end{cases}$$



$$B.C_2 \begin{cases} y = \delta \\ v_x = 0 \end{cases}$$

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\boxed{\tau_{yz} = \frac{P_0 - P_L}{L} y}$$

$$\tau_{yz} = -\eta \frac{dv_z}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L} y$$

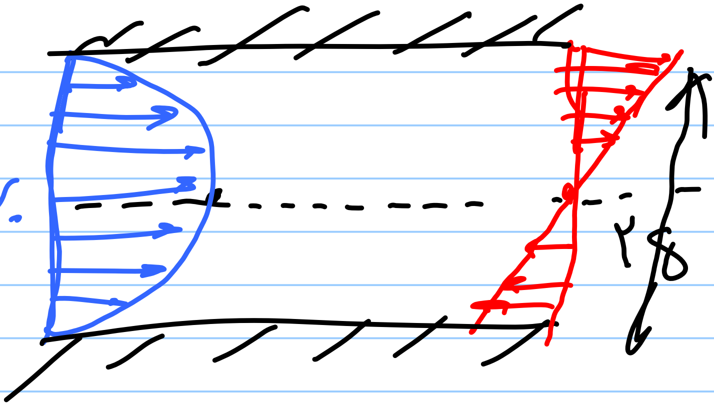
$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{-L\eta} y \Rightarrow v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2L\eta}\right) y^2 + C_c$$

$$0 = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2L\eta}\right) \delta^2 + C_c \Rightarrow C_c = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L\eta}\right) \delta^2$$

$$v_z = -\frac{(P_0 - P_L)}{2L\eta} y^2 + \frac{(P_0 - P_L)}{2L\eta} \delta^2$$

$$\boxed{v_z = \frac{1}{2\eta} \left(\delta^2 - y^2\right) \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right)}$$

$$y=۰ \Rightarrow V_{max}=\frac{1}{۲\eta}\delta^{۲}\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)$$

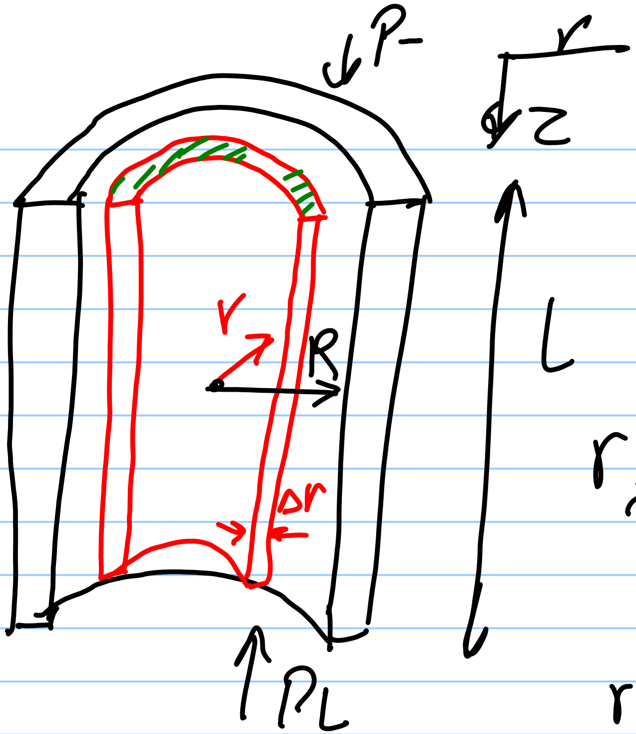


$$\bar{V}_x=\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}V_x\,dy=\frac{\delta^{۲}}{۳\eta}\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)$$

$$\underset{\text{حجمی}}{Q_V}=\bar{V}_x(۲\delta W)=\frac{۲W\delta^{۳}}{۳\eta}\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)$$

$$\underset{\text{جرمی}}{Q_m}=\rho\,Q_V=\frac{۲W\rho\delta^{۳}}{۳\eta}\left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)$$

شارش جریان در یک لوله



سرعت مومنتوم ورودی در صفحه r $= \tau_{rz}|_r \, 2\pi r L$

سرعت مومنتوم خروجی از صفحه $r+\Delta r$ $= \tau_{rz}|_{r+\Delta r} (2\pi r L)$

نیروهای وارده بر سیستم : نیروی وزن سیال $= m \cdot g = \rho_0 V \cdot g = (2\pi r L \Delta r)\rho_0 g$

نیروی اختلاف فشار ورودی و خروجی $= 2\pi r \Delta r (P_0 - P_L)$

موازنه مومنتوم

$$(\cancel{2\pi} rL\tau_{rz})\Big|_{r} - (\cancel{2\pi} rL\tau_{rz})\Big|_{r+\Delta r} + \cancel{2\pi} r\Delta r L\rho g + \cancel{2\pi} r\Delta r(P_0 - P_L) = 0$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{r\tau_{rz}\big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz}\big|_{r}}{\Delta r} = \frac{(P_0 - P_L)}{L} r + \rho g r$$

$$\boxed{\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right] r} \quad ①$$

✓

انتگرال گیری $$r\tau_{rz} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\tau_{rz} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{r}{2} + \boxed{\frac{C_1}{r}}$$

$$B.C_1 \begin{cases} r = 0 \\ \tau_{rz} = 0 \end{cases}$$

$$\tau_{rz} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{r}{2}$$

$$C_1 = 0$$

$$\tau_{rz} = -\eta \frac{dv_z}{dr} \Rightarrow \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{r}{2} = -\eta \frac{dv_z}{dr}$$

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{r}{2\eta}$$

$$v_z = -\left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{r^2}{4\eta} + C_2$$

$$B.C_2 \begin{cases} r = R \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$0 = -\left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{R^{\Gamma}}{\varepsilon\eta} + C_c \Rightarrow \boxed{C_c = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{R^{\Gamma}}{\varepsilon\eta}}$$

$$v_z = -\left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{r^{\Gamma}}{\varepsilon\eta} + \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{R^{\Gamma}}{\varepsilon\eta}$$

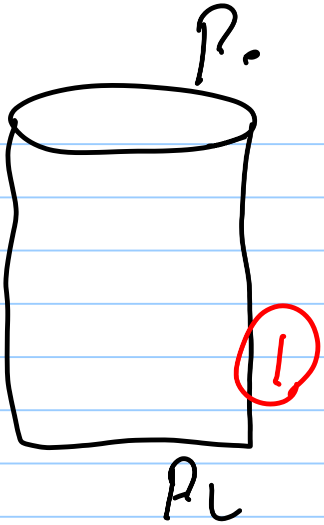
$$\boxed{v_z = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{R^{\Gamma}}{\varepsilon\eta}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\Gamma}\right]}$$

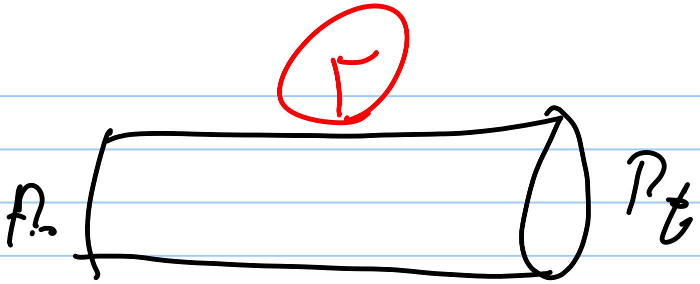
$$\underset{r=0}{v_z^{max}} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{R^{\Gamma}}{\varepsilon\eta}$$

$$\overline{V}_z = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_z\, r\,dr\,d\theta \Rightarrow \boxed{\overline{V}_z = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{R^2}{8\eta}}$$

$$Q_V = \overline{V}_z\left(\pi R^2\right) \Rightarrow \boxed{Q_V = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{\pi R^4}{8\eta}}$$

$$Q_m = \rho\, Q_V \Rightarrow \boxed{Q_m = \left[\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right]\frac{\pi \rho R^4}{8\eta}}$$





①

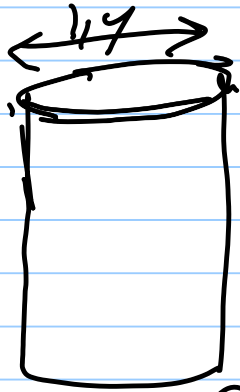
$$\boxed{\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left[\overbrace{\frac{P_0 - P_L}{L}}^{\text{نیروی اختلاف فشار}} + \overbrace{\rho g}^{\text{نیروی وزن}}\right] r}$$

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left[\frac{P_0 - P_L}{L}\right] r \quad ②$$

$$\boxed{\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \rho g r}$$

فقط نیروی وارده نیروی وزن است

مثال: آب در $290K$ (۱ atm) در داخل یک لوله عمودی به قطر ۱۶mm با افت فشار در طول لوله ۹۰۰ Nm^{-3} حرکت می‌کند. سرعت شار حجمی را حساب کنید.



$$\frac{P_0 - P_L}{L} = \frac{Nm^{-2}}{m}$$

$$Q_z = \left[\frac{P_0 - P_L}{L}\right]\frac{\pi R^4}{8\eta}$$

$$\eta = 1\times10^{-3}\ N.s\,m^{-2}$$

$$Q = 900 \times \frac{\pi}{8} \times (0/8\times10^{-2})^4 \frac{1}{1\times10^{-3}}$$

$$Q_v = ۱٫۳۴ \times ۱۰^{-۷} \frac{m^۳}{s}$$

$$Q_m = \rho Q_v = ۱۰^۳ \frac{kg}{m^۳} (۱٫۳۴ \times ۱۰^{-۷}) \frac{m^۳}{s}$$

$$\boxed{Q_m = ۱٫۳۴ \times ۱۰^{-۴} \frac{kg}{s}}$$

<u>ادامه سوال</u>: حالا بدست بیارید که آیا جریان لامینار است؟

$$Re = \frac{D \bar{V}}{\nu} = \frac{D \bar{V} \rho}{\eta} \qquad Q_v = \bar{V}(A)$$

$$Re = \frac{D \frac{Q_v}{\pi D^2/4} \rho}{\eta} = \frac{4 Q_v \rho}{\pi D \eta}$$

$$Re = \frac{۴}{۳٫۱۴} \times \frac{۱٫۳۴ \times ۱۰^{-۴} \times 1000}{۱٫۶ \times ۱۰^{-۳} \times ۱ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow \boxed{Re = ۷۷٫۶}$$

$Re < ۲۱۰۰$ پس حرکت سیال به صورت لامینار است.